Opg 3.14

$$P(X<500) = 0{,}10$$
$$\Updownarrow$$
$$P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{500-\mu}{4}) = 0{,}10$$
$$\Updownarrow$$
$$P(Z<\frac{500-\mu}{4}) = 0{,}10$$
$$\Updownarrow$$
$$\Phi(\frac{500-\mu}{4}) = 0{,}10$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{500-\mu}{4} = -1{,}28$$
$$\Updownarrow$$
$$\mu = 500 + 4*1{,}28 = 505{,}126$$

Middelværdien er altså 505,126 gram.

Dette kunne alternativt have været aflæst på et normalfordelingspapir.

$$P(X>510) = 1- P(X\leq 510) = 1- P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{510-505{,}126}{4}) = 1 - \Phi(1{,}2185) = 1- 0{,}8885 = 0{,}1115$$

Der er altså 11,15% sandsynlighed for at få en pakke med mere end 510 gram i.

$$\begin{aligned} P(500<X<505) &= P(X<505) - P(X\leq 500) \\ &= \Phi(\frac{505-505{,}126}{4}) - \Phi(\frac{500-505{,}126}{4}) \\ &= \Phi(-0{,}03) - \Phi(-1{,}28) \\ &= 0{,}4874 - 0{,}1000 \\ &= 0{,}3874. \end{aligned}$$

Sandsynligheden er altså 38,74 %.

Y betegner nu en stokastisk, der angiver antallet ud af de 25 pakker, der vejer under 500 gram.
Y er binomialfordelt med antalsparameter n = 25 og sandsynlighedsparameter p = 0,10, da

1. der er tale om to mulige udfald (under 500 gram eller ej)
2. der er tale om et endeligt antal pakker
3. der må forudsættes uafhængighed mellem de enkelt pakker – egentlig er Y hypergeometrisk fordelt, men da der må være tale om en lille stikprøve ud af en stor mængde, approximerer denne til binomialfordelingen.

$$P(Y= 1) = K(25,1)0{,}10^{1}\,0{,}90^{24} = 0{,}1994$$

Middelværdien for Y er $np = 25 \cdot 0.1 = 2{,}5$, så typetallet er enten 2 eller 3.

$P(Y=2) = K(25,2)0{,}10^{2}\,0{,}90^{23} = 0{,}2659$
$P(Y=3) = K(25,3)0{,}10^{3}\,0{,}90^{22} = 0{,}2265$

Typetallet er dermed 2, hvorfor dette også er det mest sandsynlige antal pakker, der vejer for lidt.

Ved parallelforskydning af linien fra før, kan den ny middelværdi aflæses. Alternativt må vi igennem følgende udregning:

$$P(X<500) \leq 0{,}05$$
$$\Updownarrow$$
$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{500-\mu}{4}\right) \leq 0{,}05$$
$$\Updownarrow$$
$$P\left(Z < \frac{500-\mu}{4}\right) \leq 0{,}05$$
$$\Updownarrow$$
$$\Phi\left(\frac{500-\mu}{4}\right) \leq 0{,}05$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{500-\mu}{4} \leq -1{,}6449$$
$$\Updownarrow$$
$$\mu \geq 500 + 4*1{,}6449 = 506{,}579$$

Den nye middelværdi må altså minimalt være 506,579 gram.