

Opgave 4.17

I forbindelse med produktion af elpærer anvender man et kvalitetsmål, hvor man ser på en elpæres levetid, når den bliver tændt og slukket hvert femte minut.

Man har simpelt tilfældigt udvalgt en stikprøve på 50 elpærer. Summen af disse elpæres levetid var:

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 52000 \text{ timer}$$

$$\sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2 = 551.000 \text{ timer}^2$$

1. Beregn den gennemsnitlige levetid og variansen på levetiden

$$\text{Gennemsnitlig levetid: } \frac{\sum x_i}{n} = \frac{52000}{50} = 1040 \text{ timer}$$

$$\text{Variansen på levetiden: } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{50-1} 551000 = 11244,89796 \approx 11244,90 \text{ timer}^2$$

Det antages, at elpærenes levetid følger en normalfordeling

2. Med udgangspunkt i stikprøveresultatet bedes du beregne sandsynligheden for, at en elpære har en levetid på over 900 timer.

Lad X være den stokastiske variabel, der angiver levetiden for en elpære. Så gælder

$$X \sim N(\mu = 1040; \sigma^2 = 11244,90)$$

$$P(X > 900) = 1 - P(X \leq 900) = 1 - P\left(\frac{X - 1040}{\sqrt{11244,90}} \leq \frac{900 - 1040}{\sqrt{11244,90}}\right) = 1 - P(Z \leq -1,3202)$$

$$= 1 - \Phi(-1,3202) = 1 - 0,09338 = 0,90662$$

PaceXL: Probabilities

Normal Dist:	x	z	Mean	StDev	
	-1,3202	-1,32	0,	1,	
	Pr(X <= x)	Pr(X > x)	Pr(-x < X < +x)	Pr(0 <.. < +z)	Pr(Tails)
	0,09338	0,90662	0,81323	0,40662	0,18677

Producenten af elpærer har hidtil antaget, at elpærene i gennemsnit har en levetid på 1.000 timer

3. Efterprøv ved hjælp af en hypotesetest, om der på baggrund af stikprøveresultatet er grund til at revidere denne antagelse

Hypotese:

Nulhypotesen $H_0 : \mu = 1000$

Alternativhypotesen $H_1 : \mu \neq 1000$

Forudsætninger:

X er antaget at følge en normalfordeling.

Endvidere forudsætter jeg, at $\frac{n}{N} < 5\%$, så der ikke skal foretages korrektion for endelig population.

Teststørrelse:

Da vi har ukendt varians, gælder: $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$

$$t_{n-1=49}^{test} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1040 - 1000}{\sqrt{11244,90}/\sqrt{50}} = 2,66727$$

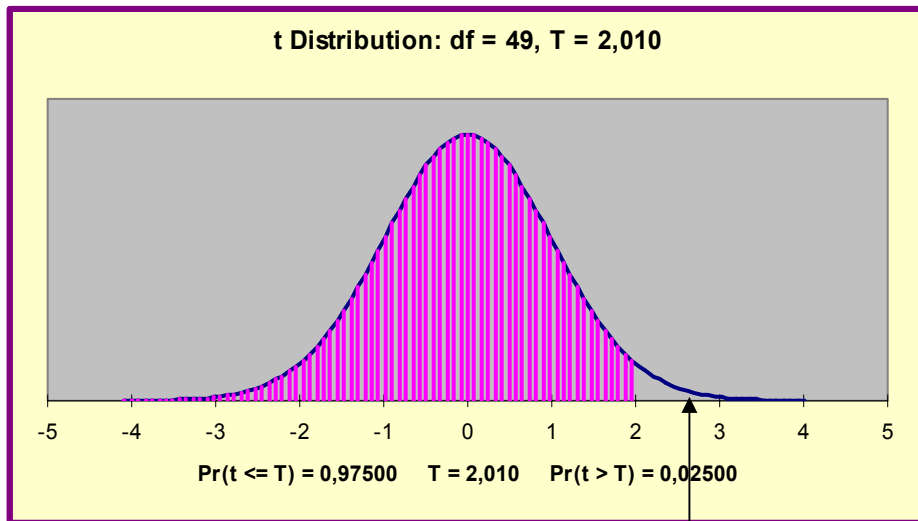
Kritisk værdi:

Der er tale om en dobbeltsidet test, og jeg vælger at teste på signifikansniveau 5%.

$$t_{DF=50-1,1-\alpha=0,975}^{kritisk} = t_{DF=49,1-\alpha=0,975}^{kritisk} = 2,01$$

PaceXL: Probabilities

t Distribution:	T	df	Mean	StDev
	2,01	49,	0,	1,0211
	Pr(t <= T)	Pr(t > T)	Pr(-T<t<+T)	Pr(0<..<+T)
	0,97500	0,02500	0,95000	0,47500
				Pr(Tails)
				0,05000



$$t^{test} = 2,66727$$

Beslutningsregel og konklusion:

Nulhypotesen forkastes såfremt $t^{test} < -t^{kritisk}$ eller $t^{test} > t^{kritisk}$, dvs. såfremt $t^{test} < -2,01$ eller $t^{test} > 2,01$

Da $t^{test} = 2,66727$ forkastes nulhypotesen

Der er altså grund til at revidere antagelsen om, at elpærerne i gennemsnit har en levetid på 1000 timer