Opgave 4.18

Te i poser skal indeholde 200g, da det er denne vægt der står trykt på poserne. Middelværdien er lig 205 g og standardafvigelsen er lig 2,5 g. Påfyldningsvægten antages at være normalfordelt.

X~N(205;2,5^2)
X: Påfyldningsvægten i gram

1) Beregn sandsynligheden for at en pose indeholder under 200 g.

$$P(X<200) = P\left(Z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z<\frac{200-205}{2{,}5}\right) = P(Z<-2) = 0{,}02275$$

Dvs. der er 2,275% risiko for at en pose indeholder under 200 g.

2) Idet der er mistanke om at variansen er steget, udtages der en stikprøve på 25 observationer
n=25 $\quad \alpha$=0,05

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 5107{,}19 \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{5107{,}19}{25} = 204{,}288$$

$$\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 279{,}7 \qquad s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{279{,}1}{(25-1)} = 11{,}6542$$

s = $\sqrt{s^2} = \sqrt{11{,}6542} = 3{,}4138$

Test om årsagen til klagerne skyldes at standardafvigelsen er større end 2,5 g:

Hypoteser:
H_o: $\sigma^2 = 2{,}5^2$
H_1: $\sigma^2 > 2{,}5^2$

Forudsætninger:
Populationen skal være normalfordelt, hvilket ifølge teksten er opfyldt.

Test:

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)*s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)*11{,}6542}{2{,}5^2} = 44{,}754$$

Kritiske værdier:
$\chi^2_{(24;0,95)} = 36{,}42$

Konklusion:
Da $\chi^2_{obs} = 44{,}754 > \chi^2_{(24;0,95)} = 36{,}42$ forkaster vi H_o, dvs. at årsagerne til klagerne skyldes at standardafvigelsen er større end 2,5 g.

Test om årsagerne til klagerne skyldes at middelpåfyldningsvægten er mindre end 205 g:

Hypoteser:
H_o: $\mu = 205$
H_1: $\mu < 205$

Forudsætninger:
$\bar{x}$~N, da moderpopulationen er normalfordelt, er $\bar{x}$ det også.

Test:
σ er ukendt og n<50 hvilket medfører at vi benytter t-fordelingen

$$t'(n-1) = \frac{x-\mu_o}{s/\sqrt{n}} = \frac{204{,}288-205}{3{,}4138/\sqrt{25}} = -1{,}0429$$

Kritiske værdier:
$t_{(24,0,05)} = -1{,}711$

Konklusion:
Da t′ = -1,0429 > $t_{(24,0,05)}$ = -1,711 kan vi ikke forkaste H_o, hvorfor det ikke kan påvises at klagerne skyldes en påfyldningsvægt der er mindre end 205 g.

3)
Ved forsendelser indeholder en kasse med te 240 teposer. Kassens vægt er lig 700 g. Den samlede vægt for kassen og teposerne må ikke overstige 50 kg.

$\bar{x}$ = 205 g s = 2,5 g

Beregn middelværdien og standardafvigelsen for vægten pr. kasse:

Benyt her regnereglerne for stokastiske variable
H: vægten pr kasse

Middelværdien:
$E(H) = w_1 * E(X_1) + w_2 * E(X_2) + ...+ w_n * E(X_n)$
$= \underbrace{1*205+1*205+.....+1*205}_{240\ gange} + 700 = 49.900$ g = 49,9 kg.

Variansen ved uafhængighed:
$V(H) = w_1^2 * V(X_1) + w_2^2 * V(X_2) + ... + w_n^2 * V(X_n)$
$= \underbrace{1*2{,}5^2 + 1*2{,}5^2 + ... + 1*2{,}5^2}_{240\ gange} = 1500g^2$

Standardafvigelsen:
$STD(H) = \sqrt{1500} = 38{,}73$g =0,03873 kg.

4)
H er normalfordelt, da X er det.

$$P(H>50) = P(Z>\frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z>\frac{50-49{,}9}{0{,}03873}) = P(Z>2{,}58) = P(Z<-2{,}58) = 0{,}00494$$

Virksomheden behøver ikke et andet antal teposer pr. kasse, da der kun er 0,494% risiko for at vægten pr. kasse er over 50 kg.